Resolución de problemas de coherencia mediante redes de consenso

M. Rebollo*
Universitat Politècnica de València
Camino de Vera s/n 46021 Valencia

El problema del cálculo de la coherencia[5] de una red consiste en, dado un conjunto de elementos y de relaciones positivas (coherentes) y negativas (incoherentes) entre ellos, determinar la división de sus nodos en dos conjuntos de tal forma que se maximice la consistencia de la red. Es un problema que aparece en diferentes actividades humanas relacionadas con las decisiones, opiniones, elecciones, recomendaciones, gestión de la confianza, justificación ética o legal, etc.

El problema se representa mediante un grafo no dirigido y ponderado donde los pesos $a_{ij} \in [-1, 1]$. Se trata de encontrar una partición de los elementos de la red en dos conjuntos N^+ y N^- de forma que dos elementos i, j pertenecen a N^+ si y solo si $a_{ij} > 0$ y uno de ellos pertenece a N^+ y otro a N^- cuando $a_{ij} < 0$. La coherencia de la partición se define como

$$W = \frac{\sum_{i,j \in N^+} a_{ij} - \sum_{i \in N^+, j \in N^-} a_{ij}}{|N|} \tag{1}$$

La solución óptima es la que maximiza el valor de W (ver Fig. 1). Es un problema intratable: no existe una solución en tiempo polinómico que garantice el óptimo. Habitualmente resuelve como un problema de satisfacción de restricciones[4] y se emplean métodos que proporcionan una solución aproximada a travÃ©s de técnicas de optimización no lineal o redes neuronales (como redes de Hopfield[1]).

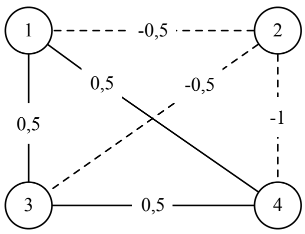

FIG. 1. Ejemplo de problema de coherencia. La partición que maximiza la coherencia es $N^+ = \{1, 3, 4\}, N^- = \{2\}$, con $W = \frac{0,5+0,5+0,5+0,5+0,5+1}{6} = 0,583333$

En el presente trabajo se propone emplear redes de consenso[3] para determinar la partición óptima. Cada nodo i de la red actualiza su valor x_i como la media ponderada de los valores recibidos de sus vecinos. La dinámica de las redes de consenso queda definida a través de la laplaciana de la matriz de adyacencia $L = D - A$, donde D es una matriz diagonal que contiene el grado de los nodos y A es la matriz de adyacencia de la red. Se garantiza que la red converge a la media ponderada global si L es definida positiva. Pero esto no se cumple en el caso de los problemas de coherencia debido a la presencia de los pesos negativos en la red. Por ello, debe modificarse en cálculo de L para el caso de *signed graphs*[2]. Llamaremos a esa matriz $\bar{L}$.

En el caso discreto, la dinámica de la red queda definida por $x(t+1) = \bar{P}x(t)$, siendo $\bar{P}$ = una matriz estocástica obtenida a partir de $\bar{L}$. Inicializando cada nodo de la red con un valor x_i aleatorio, se observa que cuando la red se estabiliza, los nodos quedan separados en dos grupos por el signo del valor final de x_i.

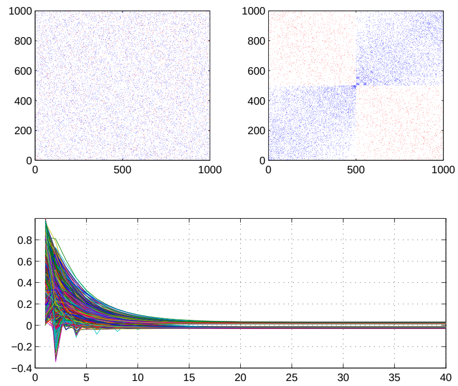

FIG. 2. Coherencia en una red de 1000 nodos. [Arriba] Red inicial y grupos detectados tras la estabilizacion (los puntos rojos representan pesos negativos y los azules positivos) [Abajo] Evolucion de los valores de los nodos. A partir de la iteracion 15 aparecen 2 grupos

La ventaja de este método es que se puede implementar de forma completamente descentralizada, de manera que no sea necesario conocer la estructura de la red completa. Cada nodo intercambia información con sus vecinos y, cuando se estabiliza, los nodos quedan divididos en 2 grupos de manera que cada nodo puede saber si un vecino dado pertenece o no a su grupo.

* mrebollo@dsic.upv.es

[1] J. J. Hopfield, *PNAS*, **79**(8), 2554–2558, (1982).
[2] Jerome K. et al., in *Proc. of the 10th SIAM International Conference on Data Mining*, pp. 559–559, (2010).
[3] R. Olfati-Saber and R.M. Murray, IEEE T-AC **49**(9), 1520 – 1533, (2004).
[4] P. Thagard and K. Verburgt, in *Cognitive Science*, **22**(1), 1–24, (1998).
[5] P. Thagard, in *Coherence in Tought and Action* (MIT Press, 2000).